CHAPITRE XIII

FONCTIONS DE DEUX VARIABLES

Table des matières

ECG 2 Maths appliquées, http://louismerlin.fr.

1. Fonctions continues sur $\mathbb{R}^2$

1.1. Fonctions définies sur $\mathbb{R}^2$ et représentation graphique.

Définition : Fonctions définies sur $\mathbb{R}^2$

On appelle fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ tout procédé permettant d'associer, à chaque couple (x, y) de réels, un unique réel appelé l'image du couple (x, y).

Si f est une telle fonction, l'image de (x, y) est notée $f(x, y)$.

Exemple 1.1.1. Les fonctions $(x, y) \mapsto \dfrac{x-y}{x^2+y^2+1}$ et $(x, y) \mapsto e^{-x-y}$ sont des fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ (avec $x^2 + y^2 + 1 \neq 0$ pour tous réels x et y).

Définition : Graphe

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^2$. On appelle **graphe** de f l'ensemble des points (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ tels que $z = f(x, y)$.

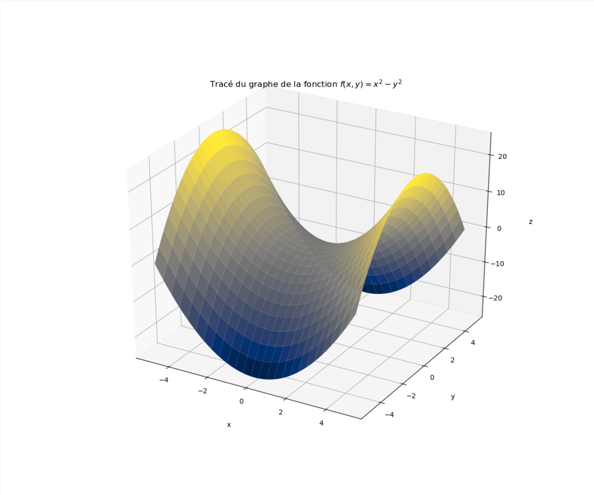
On dit que le graphe est une **surface** ou **nappe** d'équation $z = f(x, y)$.

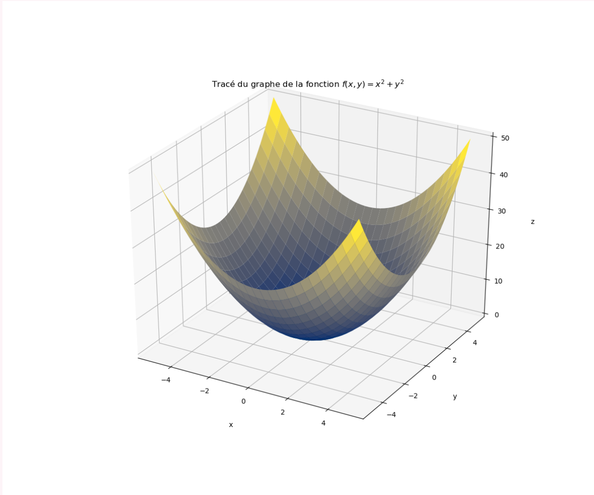
Exemple 1.1.2.

Dans cet exemple, et tous les suivants, on utilise le code Python ci-dessous pour dessiner les graphes des fonctions de deux variables. Nous ne répéterons pas le code à chaque fois. Les méthodes de représentation graphique en 3D ne sont pas à connaître.

```python
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import axes3d  # Fonction pour la 3D
from matplotlib import cm
from matplotlib.ticker import LinearLocator, FormatStrFormatter
import numpy as np

fig = plt.figure(figsize = (12,10))
ax = plt.axes(projection='3d')

x = np.arange(-5, 5.1, 0.2)
y = np.arange(-5, 5.1, 0.2)

X, Y = np.meshgrid(x, y)
Z = X**2-Y**2

surf = ax.plot_surface(X, Y, Z, cmap = plt.cm.cividis)

# Set axes label
ax.set_xlabel('x', labelpad=20)
ax.set_ylabel('y', labelpad=20)
ax.set_zlabel('z', labelpad=20)

# fig.colorbar(surf, shrink=0.5, aspect=8)
plt.title("Trace du graphe de la fonction $f(x,y)=x^2-y^2$")


plt.show()
```

Tracé de graphes





1.2. **Lignes de niveau.**

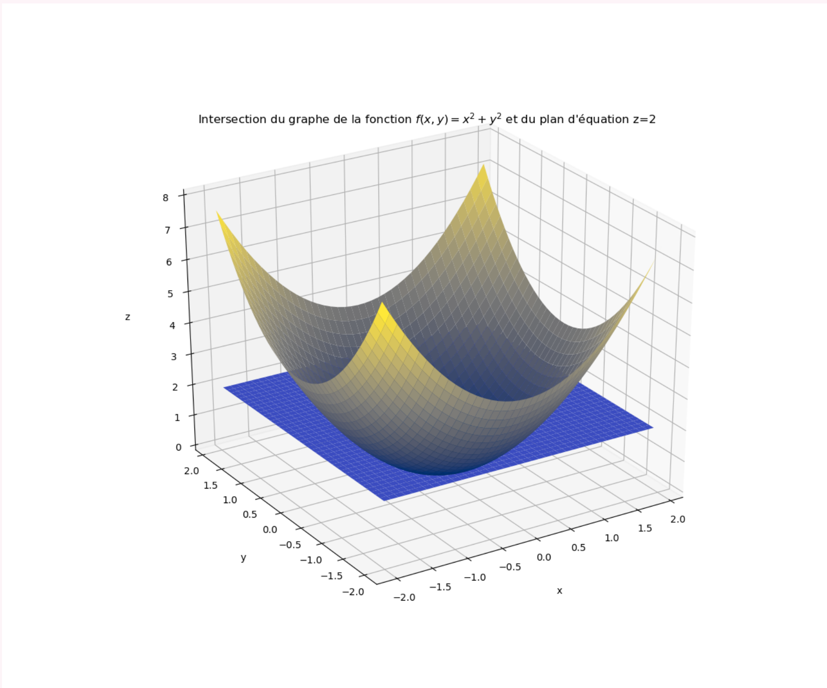
Définition : Lignes de niveau

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^2$. Pour tout réel c, on appelle **ligne de niveau** c l'ensemble des points (x, y) vérifiant l'égalité $f(x, y) = c$.

Les lignes de niveau sont des courbes représentables dans un repère orthonormé.

Remarque 1.2.1. La ligne de niveau c est l'intersection entre la surface et le plan d'équation $z = c$.

Intersection du graphe et du plan

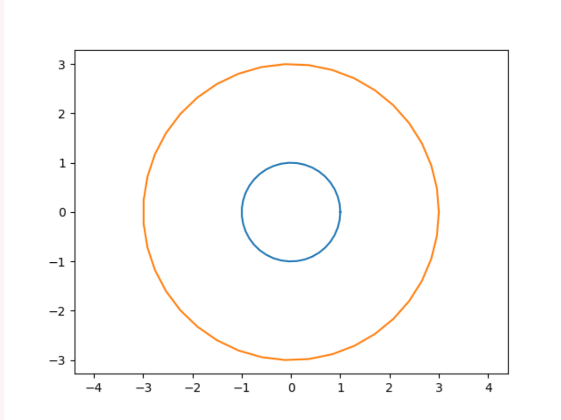


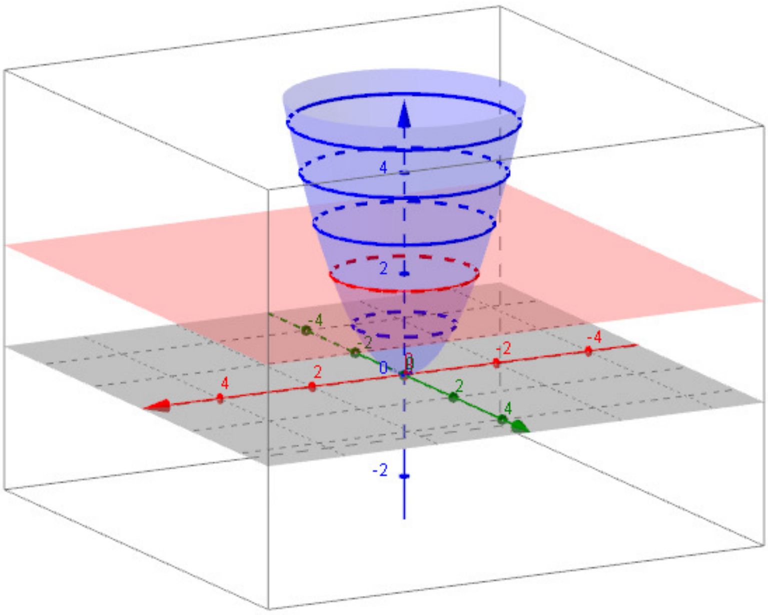
Exemple 1.2.2. La ligne de niveau c de la surface $z = x^2+y^2$ est l'ensemble $N_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x^2+y^2 = c\}$.

- Si c est strictement négatif, l'ensemble N_c est vide.
- Si $c = 0$, $N_c = \{(0, 0)\}$.
- Si c est strictement positif, l'ensemble N_c est un cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon $\sqrt{c}$.

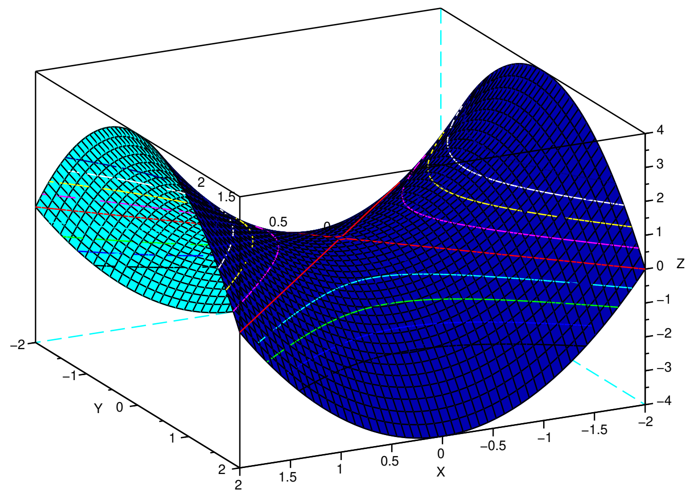
  En effet, il s'agit des points $M(x, y)$ dont la distance à l'origine O est constante et vaut $\sqrt{c}$ car $d(O, M) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

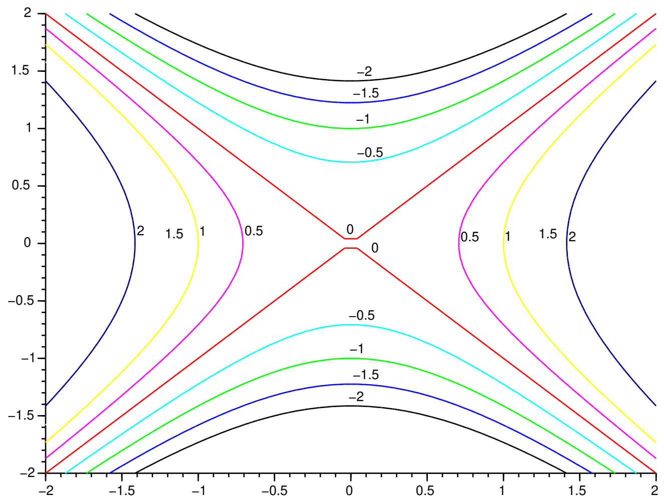
Ligne de niveau dans le plan





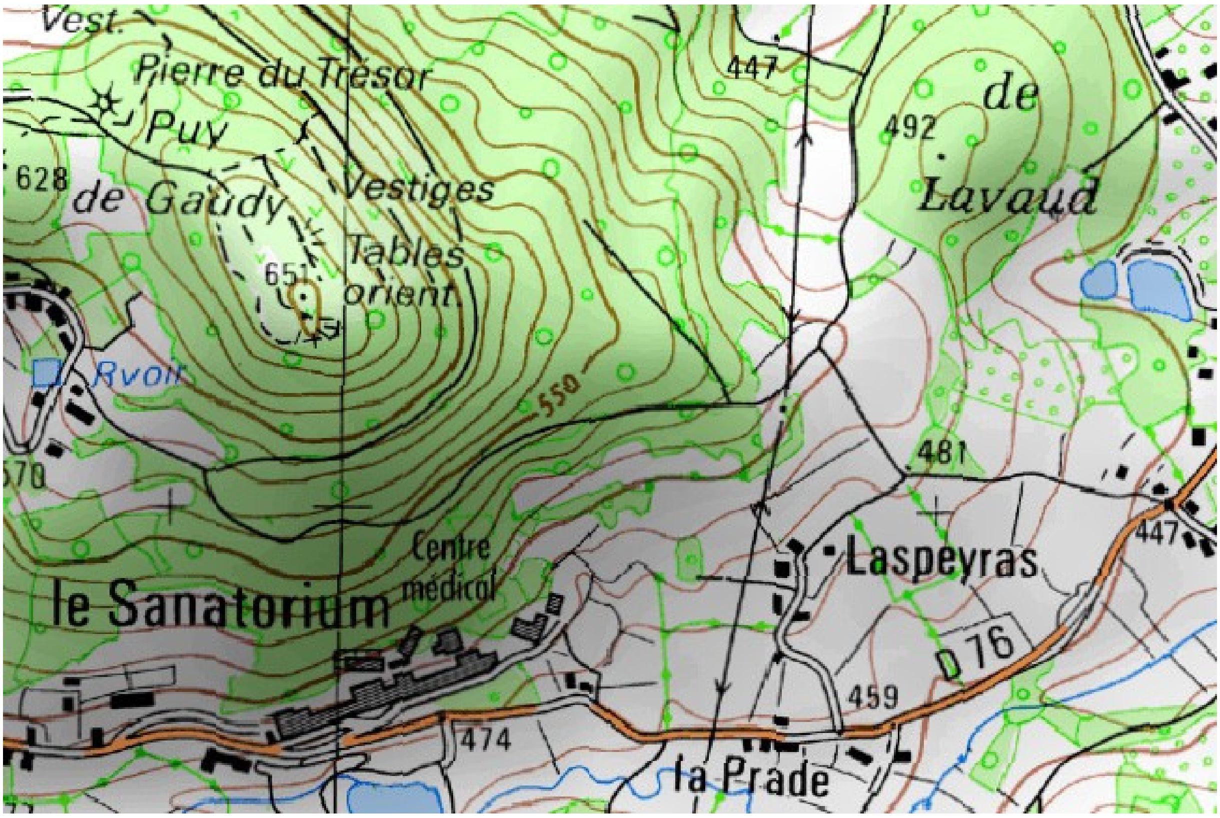
Exemple 1.2.3. Les lignes de niveau pour z de -2 à 2 avec pas de $0, 5$ sur la surface d'équation $z = x^2 - y^2$ sont représentées sur la figure suivante.





Remarque 1.2.4. Les lignes de niveau à altitude constante sont représentées sur les cartes topographiques. Elles permettent d'apprécier le dénivelé sur une carte en 2 dimensions.

Plus les lignes de niveau sont rapprochées, plus la pente est forte, et inversement.



Extrait d'une carte topographique IGN (Creuse)

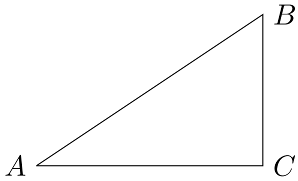
1.3. Continuité sur $\mathbb{R}^2$.

Définition : Distance euclidienne de deux points de $\mathbb{R}^2$

Si on considère deux points $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ de $\mathbb{R}^2$, on appelle **distance (euclidienne) de A à B** le réel $d(A,B)$ défini par :

$$d(A,B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

Remarque 1.3.1. Le plan $\mathbb{R}^2$ étant représenté sous forme un repère orthonormé, cette définition provient de l'application du théorème de Pythagore :



$$AB^2 = AC^2 + CB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2.$$

Définition : Fonction continue en un point de $\mathbb{R}^2$

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$ et M_0 un point de $\mathbb{R}^2$. On dit que f est continue en M_0 si, et seulement si, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\alpha > 0$ tel que, pour tout point M de $\mathbb{R}^2$, on a :

$$\text{Si} \quad d(M_0, M) \leqslant \alpha \quad \text{alors} \quad \left| f(M) - f(M_0) \right| \leqslant \varepsilon.$$

Remarque 1.3.2. Il s'agit d'une généralisation de la définition de la continuité en un point d'une fonction u définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. En effet, u est continue en $x_0 \in I$ si, et seulement si, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\alpha \geq 0$ tel que $|x - x_0| \leqslant \alpha$ et $x \in I$, alors $|u(x) - u(x_0)| \leqslant \varepsilon$, autrement dit si, et seulement si $\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = u(x_0)$ par définition de la limite.

Définition : Fonction continue sur $\mathbb{R}^2$

On dit qu'une fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ si et seulement si elle est continue en chaque point de $\mathbb{R}^2$.

Exemple 1.3.3. Les fonctions coordonnées sont continues sur $\mathbb{R}^2$.

Proposition : Opérations et composition sur les fonctions continues sur $\mathbb{R}^2$

- Les sommes, combinaisons linéaires, produits et quotients (dont le dénominateur ne s'annule pas) de fonctions continues sur $\mathbb{R}^2$ sont continus sur $\mathbb{R}^2$.
- Si f est continue sur $\mathbb{R}^2$ et à valeurs dans l'intervalle I, φ est une fonction continue sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors la composée $\varphi \circ f$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Démonstration. Admis. □

Proposition : Fonctions polynomiales

On appelle **fonction polynomiale** de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ toute combinaison linéaire de fonctions de la forme $(x,y) \mapsto x^i y^j$ avec i et j entiers naturels.

Les fonctions polynomiales sont continues sur $\mathbb{R}^2$.

Exemple 1.3.4. La fonction $(x,y) \mapsto 1 + x - 2xy + x^2y - 5x^2y^3 - 3y^2$ est une fonction polynomiale définie et continue sur $\mathbb{R}^2$.

Définition : Fonctions coordonnées

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^2$. On appelle **fonctions coordonnées** les fonctions polynomiales définies sur $\mathbb{R}^2$ par $(x,y) \mapsto x$ et $(x,y) \mapsto y$.

Remarque 1.3.5. Les fonctions coordonnées sont continues sur $\mathbb{R}^2$.

Méthode : Fonction continue sur $\mathbb{R}^2$ (ou une partie de $\mathbb{R}^2$)

Pour montrer qu'une fonction f est continue sur $\mathbb{R}^2$ (ou une partie de $\mathbb{R}^2$), on raisonne par opérations (sommes, combinaisons linéaires, produits et quotients dont le dénominateur ne s'annule pas) et compositions sur les fonctions usuelles qui sont continues sur leur domaine.

2. Calcul différentiel pour les fonctions définies sur $\mathbb{R}^2$

2.1. Dérivées partielles d'ordre 1.

Définition : Fonction avec une des deux variables "gelée".

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^2$. On note f_x (resp. f_y) la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_x(y) = f(x,y)$, avec x constant (resp. $f_y(x) = f(x,y)$, avec y constant), pour tous réels x et y.

Dans la situation précédente, on dit souvent que l'on a "gelé" une des deux variables (on gèle la variable x pour définir f_x et on gèle la variable y pour définir f_y). Nous allons conserver les notations f_x, f_y tout au long de ce parahraphe.

Définition : Dérivées partielles d'ordre 1

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^2$. Si, pour tout réel y fixé, la fonction $f_y\colon x \mapsto f(x,y)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, alors la fonction f admet une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à la première variable (x), et on note $\partial_1(f)$ la fonction dérivée obtenue :

$$\partial_1(f)(x,y) = f_y'(x).$$

On définit de même sur $\mathbb{R}^2$ la fonction $\partial_2(f)$ qui est la dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à la seconde variable (y) :

$$\partial_2(f)(x,y) = f'_x(y).$$

Remarque 2.1.1. On peut rencontrer les notations suivantes : $\partial_1(f) = \dfrac{\partial f}{\partial x}$ qui signifie que l'on dérive par rapport à la variable x, y étant supposé constant par rapport à x. De même, $\partial_2(f) = \dfrac{\partial f}{\partial y}$, où l'on dérive par rapport à la variable y, avec x supposé constant par rapport à y.

Exemple 2.1.2. Soit f définie par $f(x,y) = x^2 + xy - y^2$. Alors f est une fonction polynomiale donc admet des dérivées partielles d'ordre 1, et :

$$\partial_1(f)(x,y) = 2x + y \qquad \text{et} \qquad \partial_2(f)(x,y) = x - 2y.$$

Exercice 2.1.3. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de la fonction g définie par $g(x,y) = e^{x-y}$ et de la fonction h définie par $h(x,y) = \ln(x^2 + y^2 + 1)$.

Définition : Gradient

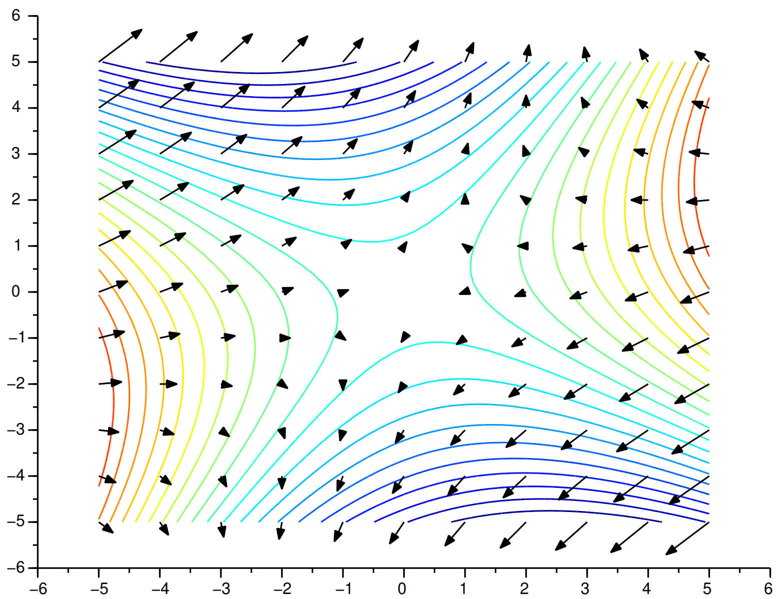
Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ et admettant des dérivées partielles. On appelle **gradient** de f en (x,y), et on note $\nabla(f)(x,y)$ le vecteur de $Mc_{2,1}(\mathbb{R})$ défini par $\begin{pmatrix} \partial_1(f)(x,y) \\ \partial_2(f)(x,y) \end{pmatrix}$.

Le symbole ∇ se lit *nabla*.

Exemple 2.1.4. Pour $f(x,y) = x^2 + xy - y^2$, on a : $\nabla(f)(x,y) = \begin{pmatrix} 2x + y \\ x - 2y \end{pmatrix}$.

Exercice 2.1.5. Donner le gradient des fonctions g et h de l'exercice 2.1.3.

Remarque 2.1.6. Le gradient est ce qui s'appelle un champs de vecteurs (en chaque point du plan se trouve un vecteur). On peut donc le représenter graphiquement de la manière suivante (pour $f(x,y) = x^2 + xy - y^2$) :



Définition : Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ définies sur $\mathbb{R}^2$

On dit qu'une fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ si ses dérivées partielles existent et sont continues sur $\mathbb{R}^2$.

Exemple 2.1.7. Les fonctions f, g et h des exemples précédents sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Proposition : Classe $\mathcal{C}^1$ implique continuité

Toute fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ est également continue sur $\mathbb{R}^2$.

Exemple 2.1.8. Les fonction f, g et h précédentes sont en particulier continues sur $\mathbb{R}^2$ car elles sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Proposition : Opérations et composition sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$

- Les sommes, combinaisons linéaires, produits et quotients (dont le dénominateur ne s'annule pas) de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
- Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et à valeurs dans l'intervalle I, φ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors la composée $\varphi \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Démonstration. Admis. □

Exemple 2.1.9. Les fonctions polynomiales sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Méthode : Fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ (ou une partie de $\mathbb{R}^2$)

Pour montrer qu'une fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ (ou une partie de $\mathbb{R}^2$), on raisonne par opérations (sommes, combinaisons linéaires, produits et quotients dont le dénominateur ne s'annule pas) et compositions sur les fonctions usuelles qui sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur leur domaine.

On rappelle que, pour une fonction u de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, le développement limité de u en un point x_0 de I s'écrit :

$$u(x_0+h) = u(x_0) + u'(x_0).h + h.\varepsilon(h) \quad \text{avec } \lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0.$$

Théorème : Développement limité d'ordre 1 en (x_0, y_0) d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Alors, pour tout couple (h, k) de réels, on peut écrire :

$$f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0, y_0) + {}^t\nabla(f)(x_0, y_0)\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + \sqrt{h^2+k^2}\varepsilon(h,k)$$

où $\varepsilon(0,0) = 0$ et ε est une fonction continue en $(0,0)$.

Cette égalité s'appelle le **développement limité d'ordre 1 de la fonction f en (x_0, y_0)**, et il est **unique**.

Démonstration. Admis. □

Remarque 2.1.10. En explicitant le produit matriciel, on peut aussi écrire :

$$f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0, y_0) + \partial_1(f)(x_0, y_0).h + \partial_2(f)(x_0, y_0).k + \sqrt{h^2+k^2}\varepsilon(h,k)$$

où $\varepsilon(0,0) = 0$ et ε est une fonction continue en $(0,0)$.

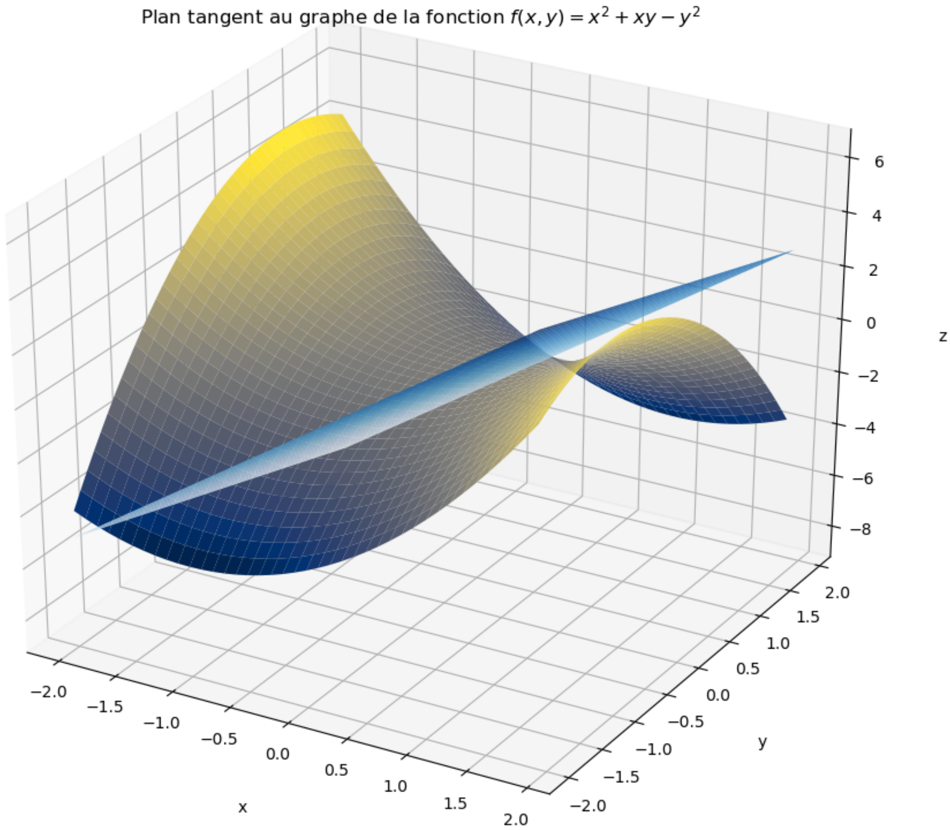
La partie régulière du développement limité d'ordre 1 donne l'équation du plan tangent à la surface d'équation $z = f(x, y)$ au point (x_0, y_0).

Exemple 2.1.11. Le développement limité d'ordre 1 de f (définie par $f(x,y) = x^2 + xy - y^2$) en $(1,1)$ s'écrit :

$$f(1+h, 1+k) = 1 + 3h - k + \sqrt{h^2+k^2}\varepsilon(h,k)$$

avec $\varepsilon(0,0) = 0$ et ε une fonction continue en $(0,0)$.

Le plan tangent en $(1,1)$ a pour équation : $z = 1 + 3(x-1) - (y-1)$.



Exercice 2.1.12. Écrire le développement limité d'ordre 1 en $(0,0)$ des fonctions g et h de l'exercice 2.1.3.

2.2. **Dérivées partielles d'ordre 2.**

Définition : Dérivées partielles d'ordre 2

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ et admettant des dérivées partielles $\partial_1(f)$ et $\partial_2(f)$ d'ordre 1 sur $\mathbb{R}^2$.

- Si la fonction $\partial_1(f)$ admet une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à la première variable (x), on dit que f possède une **dérivée partielle d'ordre 2 par rapport à la première variable** sur $\mathbb{R}^2$, que l'on note $\partial^2_{1,1}(f)$.

- Si la fonction $\partial_1(f)$ admet une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à la seconde variable (y), on dit que f possède une **dérivée partielle d'ordre 2 par rapport à la première variable puis par rapport à la seconde variable** sur $\mathbb{R}^2$, que l'on note $\partial^2_{2,1}(f)$.
- Si la fonction $\partial_2(f)$ admet une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à la première variable (x), on dit que f possède une **dérivée partielle d'ordre 2 par rapport à la seconde variable puis par rapport à la première variable** sur $\mathbb{R}^2$, que l'on note $\partial^2_{1,2}(f)$.
- Si la fonction $\partial_2(f)$ admet une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à la seconde variable (y), on dit que f possède une **dérivée partielle d'ordre 2 par rapport à la seconde variable** sur $\mathbb{R}^2$, que l'on note $\partial^2_{2,2}(f)$.

Remarque 2.2.1. On peut rencontrer les notations suivantes :

$$\partial^2_{1,1}(f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}(f) \qquad \partial^2_{2,1}(f) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}(f)$$

$$\partial^2_{1,2}(f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}(f) \qquad \partial^2_{2,2}(f) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}(f)$$

où $\frac{\partial}{\partial x}$ est l'opérateur de dérivation par rapport à x (avec y constant) et $\frac{\partial}{\partial y}$ est l'opérateur de dérivation par rapport à y (avec x constant).

Exemple 2.2.2. Avec $f(x, y) = x^2+xy-y^2$, on avait trouvé : $\partial_1(f)(x, y) = 2x+y$ et $\partial_2(f)(x, y) = x-2y$. Alors les dérivées partielles d'ordre 2 existent, et sont données par :

$$\partial^2_{1,1}(f)(x, y) = 2 \qquad \text{et} \qquad \partial^2_{2,1}(f)(x, y) = 1$$

car $\partial_1(f)(x, y) = x + 2y$, et :

$$\partial^2_{1,2}(f)(x, y) = 1 \qquad \text{et} \qquad \partial^2_{2,2}(f)(x, y) = -2$$

car $\partial_2(f)(x, y) = x - 2y$.

Remarque 2.2.3. Les dérivées partielles $\partial^2_{1,2}(f)$ et $\partial^2_{2,1}(f)$ ne sont pas toujours égales.

Exercice 2.2.4. Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 des fonctions g et h de l'exercice 2.1.3.

Définition : Matrice hessienne

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ et admettant des dérivées partielles d'ordre 2 sur $\mathbb{R}^2$. On appelle **(matrice) hessienne** de f en un point (x, y) de $\mathbb{R}^2$ la matrice de $Mc_2(\mathbb{R})$, notée $\nabla^2(f)(x, y)$ et définie par :

$$\nabla^2(f)(x, y) = \begin{pmatrix} \partial^2_{1,1}(f)(x, y) & \partial^2_{1,2}(f)(x, y) \\ \partial^2_{2,1}(f)(x, y) & \partial^2_{2,2}(f)(x, y) \end{pmatrix}$$

Le symbole ∇^2 se lit *nabla deux*.

Exemple 2.2.5. Avec $f(x, y) = x^2 + xy - y^2$, on a :

$$\nabla^2(f)(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Remarque 2.2.6. Attention, la matrice hessienne n'est pas toujours constante. C'est parce que le degré maximal de la fonction polynomiale f est 2 que sa matrice hessienne est constante.

Exercice 2.2.7. Écrire la matrice hessienne des fonctions g et h de l'exercice 2.1.3.

Définition : Fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ définies sur $\mathbb{R}^2$

On dit qu'une fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ si ses quatre dérivées partielles d'ordre 2 existent et sont continues sur $\mathbb{R}^2$.

Exemple 2.2.8. Les fonctions f, g et h des exemples précédents sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

Proposition : Classe $\mathcal{C}^2$ implique classe $\mathcal{C}^1$

Toute fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ est également de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ (donc continue sur $\mathbb{R}^2$).

Proposition : Opérations et composition sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$

- Les sommes, combinaisons linéaires, produits et quotients (dont le dénominateur ne s'annule pas) de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
- Si f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et à valeurs dans l'intervalle I, φ est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors la composée $\varphi \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

Démonstration. Admis. □

Exemple 2.2.9. Les fonctions polynomiales sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

Méthode : Fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ (ou une partie de $\mathbb{R}^2$)

Pour montrer qu'une fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ (ou une partie de $\mathbb{R}^2$), on raisonne par opérations (sommes, combinaisons linéaires, produits et quotients dont le dénominateur ne s'annule pas) et compositions sur les fonctions usuelles qui sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur leur domaine.

Théorème : Théorème de Schwarz

Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$, alors

$$\partial^2_{1,2}(f)(x,y) = \partial^2_{2,1}(f)(x,y)$$

pour tout couple de réels (x,y) de $\mathbb{R}^2$.

Démonstration. Admis. □

Exemple 2.2.10. On a déjà remarqué que $\partial^2_{1,2}(f) = \partial^2_{2,1}(f)$ pour la fonction f définie par $f(x,y) = x^2 + xy - y^2$. En effet, f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ car f est une fonction polynomiale.

Corollaire : Symétrie de la matrice hessienne

Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$, alors sa matrice hessienne est symétrique en tout point (x,y) de $\mathbb{R}^2$, donc diagonalisable.

Démonstration. Évident. □

Exemple 2.2.11. La matrice hessienne de f : $\nabla^2(f)(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ est effectivement symétrique puisque f est de classe $\mathcal{C}^2$.

On rappelle que, pour une fonction u de classe $\mathcal{C}^2$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, le développement limité d'ordre 2 de u en un point x_0 de I s'écrit :

$$u(x_0 + h) = u(x_0) + u'(x_0).h + \frac{1}{2}u''(x_0).h^2 + h^2.\varepsilon(h) \quad \text{avec} \lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0.$$

Théorème : Développement limité d'ordre 2 en (x_0, y_0) d'une fonction de classe $\mathcal{C}^2$

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$. Alors, pour tout couple (h, k) de réels voisin de $(0, 0)$, on peut écrire :

$$f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0, y_0) + {}^t\nabla(f)(x_0, y_0)\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix}\nabla^2(f)(x_0, y_0)\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + (h^2+k^2)\varepsilon(h, k)$$

où $\varepsilon(0, 0) = 0$ et ε est une fonction continue en $(0, 0)$.

Cette égalité s'appelle le **développement limité d'ordre 2 de la fonction f en (x, y)**, et il est **unique**.

Démonstration. Admis. □

Remarque 2.2.12. En explicitant les produits matriciels et en utilisant le théorème de Schwarz $\left(\partial^2_{2,1}(f) = \partial^2_{1,2}(f)\right)$, on peut aussi écrire :

$$\begin{aligned} f(x_0+h, y_0+k) &= f(x_0, y_0) \\ &\quad + \partial_1(f)(x_0, y_0).h + \partial_2(f)(x_0, y_0).k \\ &\quad + \frac{1}{2}\partial^2_{1,1}(f)(x_0, y_0).h^2 + \partial^2_{1,2}(f)(x_0, y_0).h.k + \frac{1}{2}\partial^2_{2,2}(f)(x_0, y_0).k^2 \\ &\quad + (h^2+k^2)\varepsilon(h, k) \end{aligned}$$

où $\varepsilon(0, 0) = 0$ et ε est une fonction continue en $(0, 0)$.

Exemple 2.2.13. Le développement limité d'ordre 2 de f définie par $f(x, y) = x^2 + xy - y^2$ en $(1, 1)$ s'écrit :

$$f(1+h, 1+k) = 1 + 3h - k + h^2 + hk - k^2 + (h^2+k^2)\varepsilon(h, k)$$

avec $\varepsilon(0, 0) = 0$ et ε une fonction continue en $(0, 0)$.

Exercice 2.2.14. Écrire le développement limité d'ordre 2 en $(0, 0)$ des fonctions g et h de l'exercice 2.1.3.

3. Extrema d'une fonction de deux variables réelles

3.1. Introduction à la topologie de $\mathbb{R}^2$.

Définition : Boules ouvertes et fermées

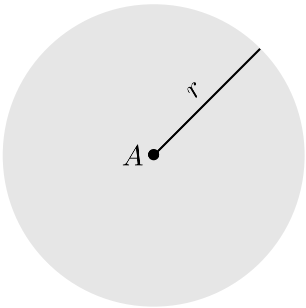
Soit A un point de $\mathbb{R}^2$ et r un réel strictement positif.

- On appelle **boule ouverte** de centre A et de rayon r, et on note $B(A, r)$, l'ensemble des points M de $\mathbb{R}^2$ tels que $d(A, M) < r$.
- On appelle **boule fermée** de centre A et de rayon r, et on note $B_f(A, r)$, l'ensemble des points M de $\mathbb{R}^2$ tels que $d(A, M) \leq r$.

Remarque 3.1.1. Il faut noter que le cercle frontière n'est pas inclus dans la boule ouverte $B(A, r)$, alors qu'il est inclus dans la boule fermée $B_f(A, r)$.

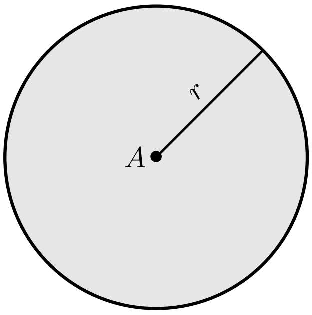
Boule ouverte de centre A et de rayon r

$M \in B(A, r) \Leftrightarrow d(A, M) < r$



Boule fermée de centre A et de rayon r

$M \in B_f(A, r) \Leftrightarrow d(A, M) \leqslant r$



Les boules ouvertes et les boules fermées généralisent les intervalles ouverts $]a; b[$ et les intervalles fermés $[a; b]$.

Définition : Parties ouvertes et fermées de $\mathbb{R}^2$

On considère un domaine U de $\mathbb{R}^2$. On dit que U est une **partie ouverte** de $\mathbb{R}^2$ lorsque, pour tout point A de U, il existe une boule ouverte de centre A entièrement incluse dans U.

La partie U est dite **fermée** lorsque son complémentaire est une partie ouverte.

Remarque 3.1.2. Intuitivement, une partie de $\mathbb{R}^2$ est ouverte lorsqu'elle ne contient **aucun** "point frontière", et elle est fermée lorsqu'elle contient **tous** ses "points frontières".

Tout comme il existe des parties de $\mathbb{R}$ qui ne sont ni ouvertes ni fermées (par exemple, les intervalle du type $]a; b]$), il existe des parties de $\mathbb{R}^2$ qui ne sont ni ouvertes ni fermées.

Exemple 3.1.3. Le domaine $]0; 1[\times]0; 1[$ est une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$, le domaine $[0; 1] \times [0; 1]$ est une partie fermée de $\mathbb{R}^2$, et le domaine $[0; 1]\times]0; 1[$ n'est ni ouvert ni fermé.

Toute boule ouverte (resp. fermée) est une partie ouverte (resp. fermée) de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3.1.4. Établir si les domaines suivants de $\mathbb{R}^2$ sont ouverts ou fermés, ou ni ouvert, ni fermé :

1. $\mathbb{R} \times [0; 1]$;

2. $\mathbb{R}\times]0; 1[$;

3. $\mathbb{R}^* \times [0; 1]$;

4. D_1 l'ensemble des points (x, y) vérifiant $1 \leqslant x + y \leqslant 3$.

5. D_2 l'ensemble des points (x, y) vérifiant $y - x^2 + 5x - 6 > 0$.

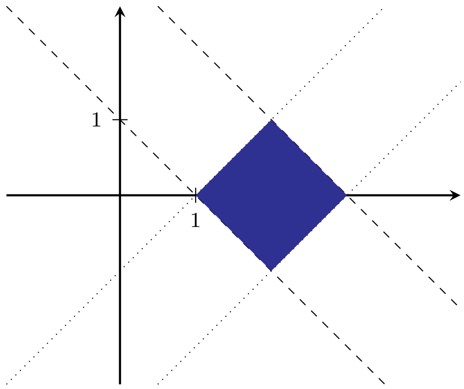
6. D_3 l'ensemble des points (x, y) vérifiant $1 \leqslant x + y \leqslant 3$ et $1 < x - y < 3$.

Définition : Parties bornées de $\mathbb{R}^2$

Une partie U de $\mathbb{R}^2$ est dite bornée lorsqu'il existe un réel $K \geq 0$ tel que $x^2 + y^2 \leq K$ pour tout point (x, y) de U.

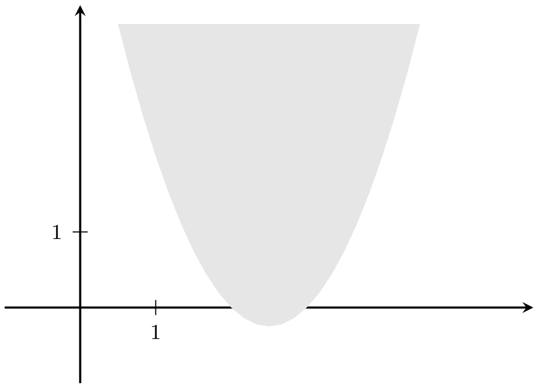
Autrement dit, la partie U est bornée si elle est incluse dans une boule fermée de centre $(0, 0)$ de $\mathbb{R}^2$.

Exemple 3.1.5. Les parties D_1 et D_2 de l'exercice 3.1.4 ne sont pas bornées, mais la partie D_3 est bornée.



3.2. **Extrema.** Les définitions de la continuité, classe $\mathcal{C}^1$ et classe $\mathcal{C}^2$ s'adaptent au cas des des fonctions de deux variables réelles définies seulement sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Exemple 3.2.1. Soit φ la fonction définie par $\varphi(x, y) = \ln(y - x^2 + 5x - 6)$. Alors φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur le domaine ouvert de $\mathbb{R}^2$ suivant : $D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y > x^2 + 5x + 6\}$. D_2 contient l'ensemble des points situés au-dessus de la parabole d'équation $y = x^2 - 5x + 6$.



Définition : Maximum, minimum et extremum local

Soit f une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ et (x_0, y_0) un point de U.

- On dit que f admet un **maximum local** en (x_0, y_0) si, et seulement s'il existe une boule ouverte B centrée en (x_0, y_0) telle que $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ pour tout point (x, y) de $B \cap U$.
- On dit que f admet un **minimum local** en (x_0, y_0) si, et seulement s'il existe une boule ouverte B centrée en (x_0, y_0) telle que $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$ pour tout point (x, y) de $B \cap U$.

On dit que f admet un **extremum local** en (x_0, y_0) si f admet un minimum ou un maximum local en (x_0, y_0).

Définition : Maximum, minimum et extremum global

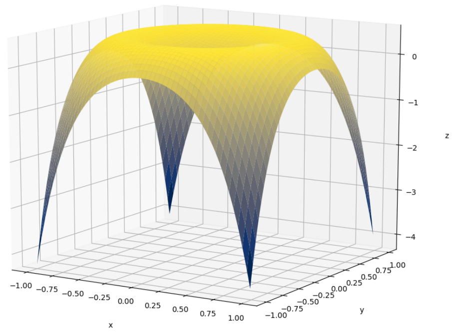
Soit f une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ et (x_0, y_0) un point de U.

- On dit que f admet un **maximum global** en (x_0, y_0) si, et seulement si $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ pour tout point (x, y) de U.
- On dit que f admet un **minimum global** en (x_0, y_0) si, et seulement si $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$ pour tout point (x, y) de U.

On dit que f admet un **extremum global** en (x_0, y_0) si f admet un minimum ou un maximum global en (x_0, y_0).

Exemple 3.2.2. **1.** Soit $f(x, y) = \left(x^2 + y^2\right)^2 \left(1 - \left(x^2 + y^2\right)\right) \left(1 + \left(x^2 + y^2\right)\right)$.
Que peut-on dire de f ?

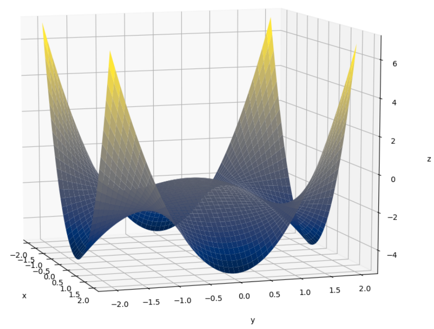
Graphe de f



2. $f(x,y) = x^2y^2 - x^2 - y^2 - 1$

Que peut-on dire de f ?

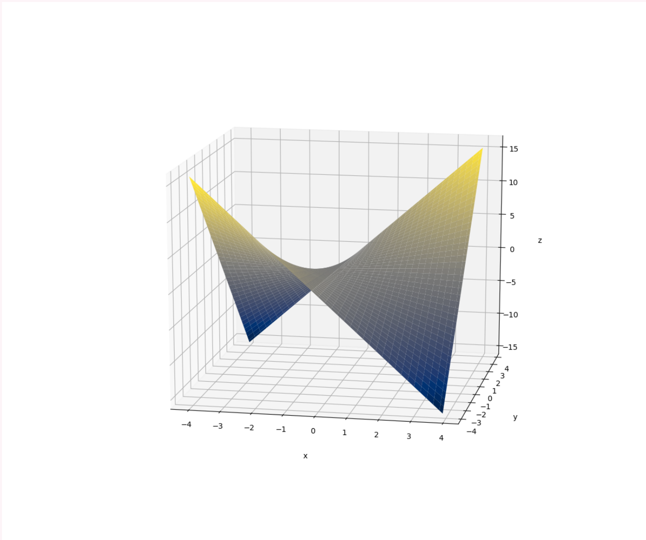
Graphe de f



3. $f(x,y) = xy$

Que peut-on dire de f ?

Graphe de f



Théorème : Fonction continue sur une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^2$

Toute fonction f **continue** sur une partie **fermée et bornée** U de $\mathbb{R}^2$ admet un minimum global et un maximum global sur U : il existe deux couples (x_m, y_m) et (x_M, y_M) de réels appartenant à U tels que :

$$\forall (x,y) \in U, \quad f(x_m, y_m) \leqslant f(x,y) \leqslant f(x_M, y_M).$$

On dit que f est *bornée* sur U, et qu'elle atteint ses bornes.

Démonstration. Admis. □

Remarque 3.2.3. Ce théorème rappelle sa version pour les fonctions d'une variable : toute fonction d'une variable continue sur un segment (intervalle fermé borné) est bornée et atteint ses bornes.

3.3. Point critique et extremum local.

Définition : Point critique

Soit f une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ et admettant des dérivées partielles d'ordre 1 sur U. On appelle point critique de f tout couple (x,y) de réels appartenant à U tels que $\nabla(f)(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Exemple 3.3.1. Soit f définie par $f(x,y) = x^2 + xy - y^2$. Recherchons les éventuels points critiques de f :

$$\nabla(f)(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x \\ 5x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0. \end{cases}$$

Donc f admet un point critique en $(0,0)$.

Exercice 3.3.2. Rechercher les éventuels points critiques des fonctions g et h de l'exercice 2.1.3.

Théorème : Extremum et point critique

Soit f une fonction de **classe** $\mathcal{C}^1$ sur un **ouvert** U de $\mathbb{R}^2$. Si f admet un extremum en un point (x_0, y_0) de U, alors (x_0, y_0) est un point critique de f.

Remarque 3.3.3.
- Attention, tout comme une fonction u définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ ne présente pas forcément un extremum aux points où sa dérivée s'annule (par exemple, $x \mapsto x^3$ en 0), une fonction de deux variables ne présente pas toujours un extremum en un point critique. La réciproque du théorème est donc fausse : certains points critiques ne sont pas des extrema.
- Si le domaine U n'est pas ouvert, f peut présenter un extremum en un point de U sans que ce point soit critique.

Théorème : Condition suffisante d'extremum local

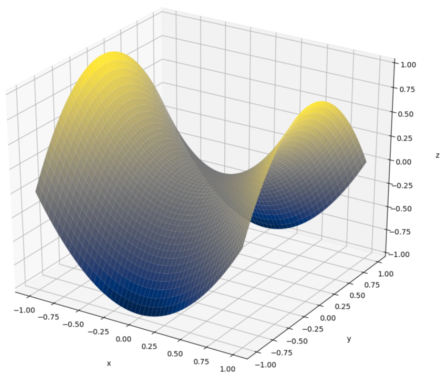
Soit f une fonction de **classe** $\mathcal{C}^2$ sur un **ouvert** U de $\mathbb{R}^2$ et (x_0, y_0) un **point critique** de f. Notons λ et μ les valeurs propres de la matrice hessienne $\nabla^2(f)(x_0, y_0)$ de f en (x_0, y_0).

- Si λ et μ sont de même signe, alors f présente un extremum en (x_0, y_0) :
  - ▷ il s'agit d'un maximum si $\lambda < 0$ et $\mu < 0$.
  - ▷ il s'agit d'un minimum si $\lambda > 0$ et $\mu > 0$.
- Si λ et μ sont non nulles et de signe opposé, alors f n'admet pas d'extremum en (x_0, y_0) : le point est un point *colle*, ou point *selle*.

Démonstration. Cas particulier où la matrice hessienne est diagonale. □

Remarque 3.3.4. Si l'une des valeurs propres de la matrice hessienne est nulle, l'étude ne permet pas de conclure.

Remarque 3.3.5. La terminologie "point col" ou "point selle" peut s'expliquer par l'étude de la surface suivante (d'équation $z = x^2 - y^2$), appelée "selle de cheval" ou "paraboloïde hyperbolique" :



En effet, le point $(0, 0)$ est un maximum dans l'une des directions, et un minimum dans l'autre, tout comme un col de montagne est le passage le plus bas entre deux sommets, mais il faut y monter pour l'atteindre.

Méthode : Trouver un extremum local

Pour rechercher les extrema locaux d'une fonction f définie et de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$:

- On calcule le gradient $\nabla(f)(x,y) = \begin{pmatrix} \partial_1(f)(x,y) \\ \partial_2(f)(x,y) \end{pmatrix}$ de f puis on détermine les points critiques de f en recherchant les points (x, y) où le gradient s'annule. Chaque point critique trouvé est un <u>candidat</u> extremum.

- On calcule les 3 dérivées partielles d'ordre 2 de f : $\partial^2_{1,1}(f)$, $\partial^2_{1,2}(f)$ et $\partial^2_{2,2}(f)$ (3 seulement à calculer car $\partial^2_{2,1}(f) = \partial^2_{1,2}(f)$ puisque f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U) et on forme la matrice hessienne qui est symétrique : $\nabla^2(f)(x,y) = \begin{pmatrix} \partial^2_{1,1}(f)(x,y) & \partial^2_{1,2}(f)(x,y) \\ \partial^2_{2,1}(f)(x,y) & \partial^2_{2,2}(f)(x,y) \end{pmatrix}$.
- On recherche les valeurs propres λ et μ de la matrice précédente en remplaçant (x,y) par les valeurs trouvées pour chaque point critique : f admet un minimum (resp. maximum) local en (x,y) si $\lambda > 0$ et $\mu > 0$ (resp. $\lambda < 0$ et $\mu < 0$), ou f admet un point col (donc pas d'extremum) en (x,y) si λ et μ sont non nulles et de signe contraire.

  Si l'une au moins des valeurs propres est nulle, cette méthode ne permet pas de conclure, mais l'exercice vous guidera pour continuer.

Exemple 3.3.6. Reprenons f définie par $f(x,y) = x^2 + xy - y^2$. Le point $(0,0)$ est critique pour f, f admet-il un extremum en ce point ?

Formons la matrice hessienne en $(0,0)$: $A = \nabla^2(f)(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. Recherchons les valeurs propres de A : il s'agit des réels λ pour lesquels la matrice $A - \lambda I_2$ n'est pas inversible.

On a :

$$A - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & -2-\lambda \end{pmatrix}$$

Échangeons les deux lignes puis effectuons une opération élémentaire pour rendre la matrice triangulaire :

$$\begin{array}{ll} \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & -2-\lambda \end{pmatrix} & \\ \begin{pmatrix} 1 & -2-\lambda \\ 2-\lambda & 1 \end{pmatrix} & L_1 \leftrightarrow L_2 \\ \begin{pmatrix} 1 & -2-\lambda \\ 0 & 5-\lambda^2 \end{pmatrix} & L_2 \leftarrow L_2 - (2-\lambda)L_1 \end{array}$$

Donc λ est valeur propre de A si et seulement si $5 - \lambda^2 = 0$. On trouve $\mathrm{Sp}(A) = \{-\sqrt{5}, \sqrt{5}\}$.

On peut aussi utiliser le critère d'inversibilité des matrices de taille 2 :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

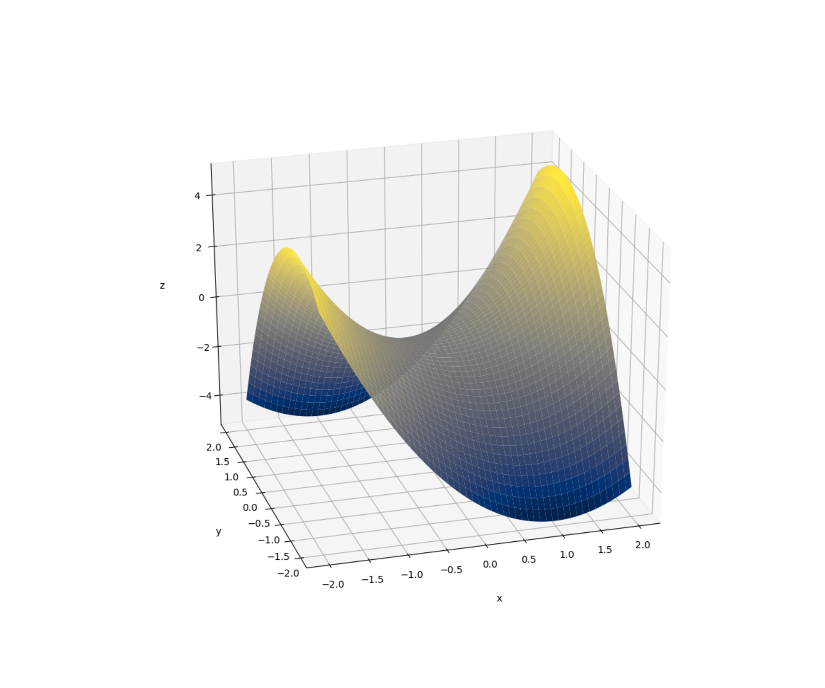
est inversible si, et seulement si $ad - bc \neq 0$.

Ainsi : $A - \lambda I_2$ n'est pas inversible si, et seulement si :

$$(2-\lambda)(-2-\lambda) - 1 \times 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 5 = 0$$

Les valeurs propres de la matrice hessienne en $(0,0)$ sont non nulles et de signe contraire, donc f présente un point col en $(0,0)$.

Graphe de f



Exercice 3.3.7. On note $\mathcal{D} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } 0 < x < y\right\}$ et on admet que $\mathcal{D}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Étudier l'existence éventuelle d'extremums locaux pour la fonction f définie sur $\mathcal{D}$ par : $f(x, y) = \sqrt{y - x}\,\ln(x)$

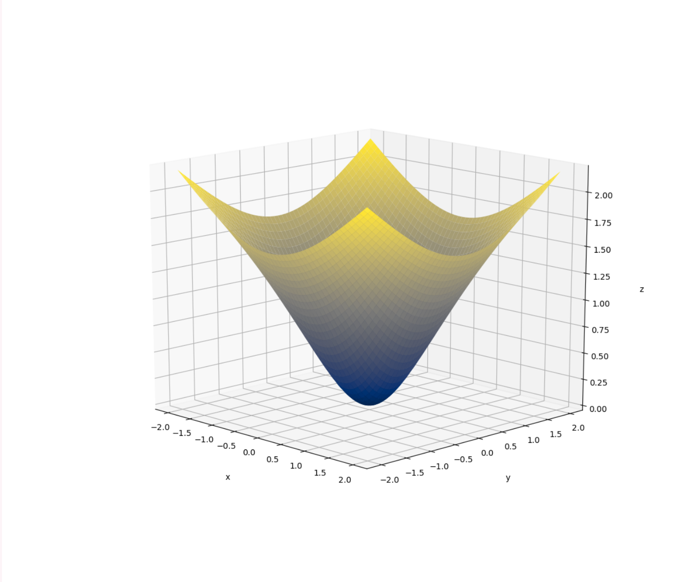
Remarque 3.3.8. Le théorème 3.3 énonce des conditions suffisantes pour que f ait un extremum *local* en un point, mais ne permet pas de prouver que cet extremum est *global.*

Méthode : Trouver un extremum global

Pour montrer que f admet un maximum (resp. minimum) global en un point(x_0, y_0), il faut prouver que $f(x, y) \leqslant f(x_0, y_0)$ (resp $f(x, y) \geqslant f(x_0, y_0)$) **pour tout couple** (x, y) **de** U.

Exercice 3.3.9. Montrer que h définie par $h(x, y) = \ln(x^2 + y^2 + 1)$ présente un minimum global sur $\mathbb{R}^2$.

Graphe de f



Exercice 3.3.10. Soit f la fonction définie sur $\mathcal{D} = [0,1] \times [0,1]$ par $f(x,y) = xy(1-x)(1-y)$.

1. Justifier que f admet un minimum global et un maximum global sur $\mathcal{D}$.

2. Montrer que le minimum global de f sur $\mathcal{D}$ vaut 0 et préciser en quel(s) point(s) ce minimum est atteint.

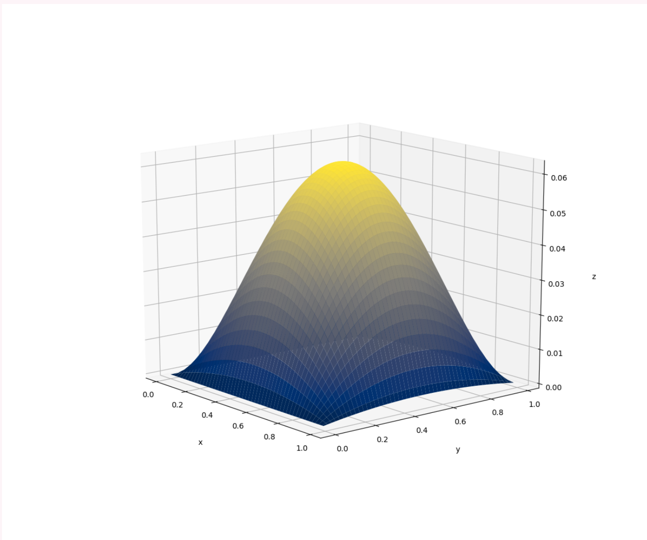
3. Justifier que le maximum global de f sur $\mathcal{D}$ est atteint en un point de $]0,1[\times]0,1[$.

Déterminer ce point et préciser la valeur du maximum global de f sur $\mathcal{D}$.

On pourra chercher une expression de f sous la forme $f\left(\frac{1}{2}+h, \frac{1}{2}+k\right) = f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) + g(h,k)$ *avec* $g(h,k) < 0$.

4. Vérifier vos calculs sur la représentation graphique suivante :

Graphe de f



Exercice type concours.

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = 19x^2 + 19y^2 + 26xy - 16x - 16y + 4$.

1. Montrer que, pour tout couple (x,y) de $\mathbb{R}^2$, $f(x,y) = 16\left(x + y - \frac{1}{2}\right)^2 + 3(x-y)^2$.

2. En déduire que f possède un minimum global sur $\mathbb{R}^2$. Préciser sa valeur, ainsi que le (ou les) point(s) où ce minimum est atteint.

Exercice type concours.

Soit f définie par $f(x,y) = x^2 + y^2 + xy + 3y + 3$.

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

2. Étudier les extrema locaux éventuels de f.

3. Monter que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = \left(y + \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}(x-1)^2$.

4. L'extremum local trouvé est-il global ? Justifier votre réponse.

Exercice type concours.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $f(x,y) = (2x + y - 1)^2 + (2x + y)^2$.

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

2. Déterminer le gradient de f, et déterminer les points critiques de f.

3. Déterminer la matrice hessienne de f aux points critiques, puis rechercher les extrema éventuels de f.

4. Montrer que pour tout couple (x,y) de réels, $f(x,y) = 2\left(2x + y - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$, puis conclure.

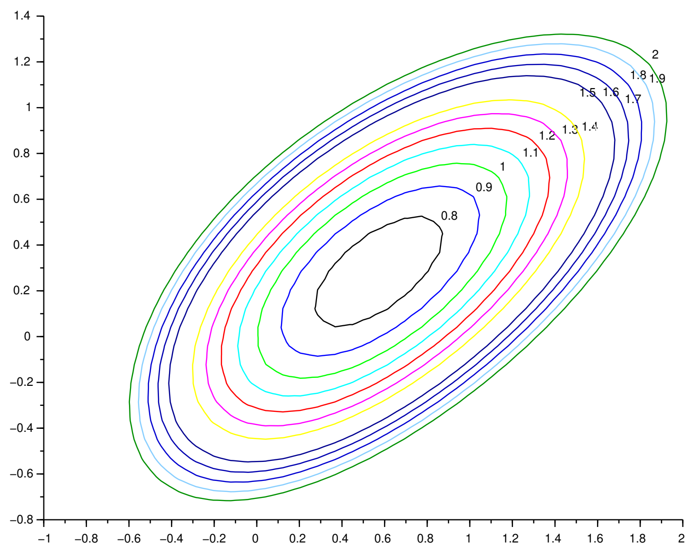
Exercice type concours.

1. Établir que l'équation $e^{-x} = x$ possède une unique solution réelle.

2. On définit sur $\mathbb{R}^2$ la fonction $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - 2xy + e^{-x}$. Montrer qu'il existe un unique couple (a,b) de réels tel que les dérivées partielles premières s'annulent simultanément en (a,b), et vérifiant : $\begin{cases} a - e^{-a} = 0 \\ b = \frac{a}{2}. \end{cases}$.

3. Montrer que f admet un unique extremum local, et préciser sa nature.

4. Donner les coordonnées approchées du minimum, en observant les lignes de niveau de f sur la figure suivante :



Exercice type concours.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = \dfrac{1}{4}(x+y)^2 - \dfrac{1}{6}(x^3+y^3)$.

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

2. Montrer que si (a,b) est un point critique de f, alors $a^2 = b^2$, puis déterminer les deux points critiques de f.

3. On suppose que $(a,b) \neq (0,0)$. Le point critique trouvé précédemment est-il un extremum local, et si oui, quelle est sa nature ?

4. Donner un équivalent simple au voisinage de 0 de $f(t, -t+t^3)$. En déduire que $(0,0)$ n'est pas un extremum local.

5. Calculer $f(t,0)$ ainsi que ses limites lorsque t tend vers $+\infty$ ou $-\infty$. En déduire que f n'admet pas d'extremum global.

4. Sujets d'annales en lien avec ce chapitre.

Remarque 4.0.1. **1.** Nous traiterons certains des sujets suivants en exercices, en travaux dirigés, en colles ou en devoir. Pour les autres, il existe des corrigés que l'on trouve facilement sur Internet. Ces corrigés sont parfois très rapides, n'hésitez pas à venir m'en parler si vous pensez qu'une question mérite des explications supplémentaires.

2. Les sujets de concours sont souvent pensés pour faire appel à plusieurs parties du programme. Dans la liste qui suit figurent les exercices pour lequel il est *nécessaire* de connaître les résultats de ce chapitre. Mais parfois *ce n'est pas suffisant* car d'autres parties du cours sont aussi impliquées. J'indique ces situations avec le symbole ⋆⋆ si la résolution de l'exercice dépend d'un chapitre dans *la suite* du programme et avec le symbole ⋆ si l'exercice peut être traité avec les connaissances de ce chapitre *et des précédents.*

3. Cette liste n'est pas exhaustive.

4. Un exercice **très classique** (en exagerant un peu en fait, le seul exercice qui fait appel à ce chapître) consiste à introduire une fonction de deux variables, demander d'en trouver le maximum, puis de "geler" une des deux variables pour fabriquer une fonction d'une seule variable sur laquelle on pose quelques questions d'analyse (dérivée,...), puis on construit une suite récurrente avec cette fonction d'une variable.

1. ECRICOME
- 1998 Problème.
- 2000 Problème.
- 2005 Exercice 2.
- 2006 Exercice 1.
- 2007 Exercice 1.
- 2009 Exercice 2.
- 2011 Exercice 2.
- 2013 Exercice 2.
- 2017 Exercice 2.
- 2019 Exercice 2.
- 2020 Exercice 2.
- 2022 Exercice 2 Partie III.

2. EDHEC
- 1999 Exercice 2.
- 2006 Exercice 3.
- 2010 Exercice 1.
- 2017 Exercice 1.

3. EML
- 2003 Exercice 2.
- 2006 Exercice 2.
- 2010 Exercice 2.
- 2012 Exercice 2.
- 2015 Exercice 2.
- 2016 Exercice 2.
- 2017 Exercice 1.
- 2018 Exercice 2.
- 2019 Exercice 3.
- 2020 Exercice 1.
- 2022 Exercice 3.

4. ESCP
- 1998 épreuve III Exercice 2.
- 2001 épreuve III Exercice 2.
- 2002 épreuve III Exercice.

5. ESC
- 2005 Exercice 2.
- 2007 Exercice 2.
- 2009 Exercice 2.

6. ESSEC
- 1999 épreuve III Exercice 2.
- 2006 épreuve III Exercice 1.

7. HEC
- 2016 Problème.